Etude d'une fonction définie par une intégrale

Soit α un réel strictement positif.

On définit une application $F_\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par $F_\alpha(x) = \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}dt}{1+tx}$.

Partie I

1.a Montrer que l'intégrale définissant $F_\alpha(x)$ est bien définie.

1.b Calculer $F_1(x)$ et $F_{1/2}(x)$.

1.c Montrer que F_α est décroissante

2.a Montrer que l'application $x \mapsto F_\alpha(x)$ est continue en 0.

2.b Etablir, pour $x > 0$, $\left|\frac{1}{x}(F_\alpha(x) - F_\alpha(0)) + \int_0^1 t^\alpha dt\right| \leq \frac{x}{\alpha+2}$.

En déduire que F_α est dérivable en 0 et donner $F'_\alpha(0)$.

3.a Pour $x > 0$, établir $F_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}\int_0^x \frac{u^{\alpha-1}}{1+u}du$.

3.b En déduire que F_α est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+ *$ et exprimer $F'_\alpha(x)$.

4.a Pour $\alpha > 1$, établir $0 \leq F_\alpha(x) \leq \frac{1}{x(\alpha-1)}$.

4.b Pour $0 < \alpha < 1$, déterminer une constante C_α ne dépendant que de α telle que $0 \leq F_\alpha(x) \leq \frac{C_\alpha}{x^\alpha}$.

4.c Déterminer la limite de F_α en $+\infty$.

Partie II

1.a Simplifier $F_\alpha(x) + xF_{\alpha+1}(x)$.

1.b Pour $x \in \mathbb{R}^+$ fixé, établir $F_\alpha(x) \underset{\alpha\to+\infty}{\to} 0$.

2. Soit $x \in [0,1]$ et $\alpha \in]0,1]$ fixés
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n x^n F_{n+\alpha}(x)$.

2.a Montrer que $u_n \to 0$

2.b Simplifier $u_{n+1} - u_n$.

2.c En calculant de deux façons $\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k$, établir $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k+\alpha} = F_\alpha(x)$

3. En déduire $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$ et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$.